2025 年度 若手・女性研究者奨励金 レポート

研究課題	**特別な非線形項のシュレディンガー方程式の解の大域挙動について**
キーワード	①非線形シュレディンガー方程式、②大域挙動、③基底状態

研究者の所属・氏名等

フリガナ 氏　名	ワタナベ　ミナミ 渡邉　南
配付時の所属先・職位等 （令和７年４月１日現在）	津田塾大学　学芸学部　数学科　助教
現在の所属先・職位等	産業技術高等専門学校　ものづくり工学科　助教
プロフィール	大学院時代より、非線形シュレディンガー方程式の解の大域挙動を初期値によって分類する研究を進めており、理化学研究所数理科学チーム大学院生リサーチアソシエイト・日本学術振興会特別研究員 DC2 を経て、津田塾大学学芸学部数学科助教を２年勤め、博士（理学）を取得。現在は産業技術高等専門学校の助教として、教育・研究の業務を行っている。

1. 研究の概要

非線形シュレディンガー方程式(NLS)は、非線形光学における基礎方程式であり、例えば水の波や光ファイバー中のパルス波のような非線形波動を記述する。非線形項が単純冪の場合、解の基本的性質としてスケール変換に対して不変である。このことから斉次性を持つ設定では線形項と非線形項のバランスを調べることができ、L^2 ノルム、H^1 ノルムが釣り合う場合をそれぞれ質量臨界、エネルギー臨界と呼ぶ。

非線形分散型方程式に分類される(NLS)は波の分散性と非線形性の競合によって解の挙動が変化する。分散性が非線形性より強い場合は、時間と共に波の振幅が減衰し、線形解に近づく散乱解と呼ばれる解になる。一方で、非線形性が分散性より強い場合には解は時間大域的に延長できず、特異性を生じる爆発解になる。最後に、その両方の釣り合いが取れている場合は、波の振幅が一定の空間形状を保持する定在波解になる。解の大域挙動を分類するために、この分散性と非線形性の兼ね合いをいかにして解析するかが重要である。

本研究では、式の不変性に乏しい指数型非線形項やディラックのデルタ関数を含む非線形項をもつ(NLS)に対して、解の大域挙動を初期値によって分類する研究を行った。ここで、上記した３種類の解の挙動の分類に関する理論は Kenig-Merle[2006]によって開発され、異なる挙動に対する初期値の条件が明らかになってきた。しかしながら、その議論では解析においてスケール不変性を有効に利用する。単純冪の場合に成り立つような不変性は、申請者の研究である非線形項の場合には欠如する。したがって、複雑な非線形項の場合にどのような変化がもたらされるかを解析することは、単に制御・予測以上に重要な問題である。

特に、指数型非線形項は空間変数２次元の場合の臨界冪に相当するため、数学的に非常に興味深い非線形項である。また、ディラックのデルタ関数を含む非線形項は、細い非線形ストリップを含む線形媒質中の波動伝播や、ナノデバイス中の波動伝播を表す重要な物理モデルとして提唱されている。

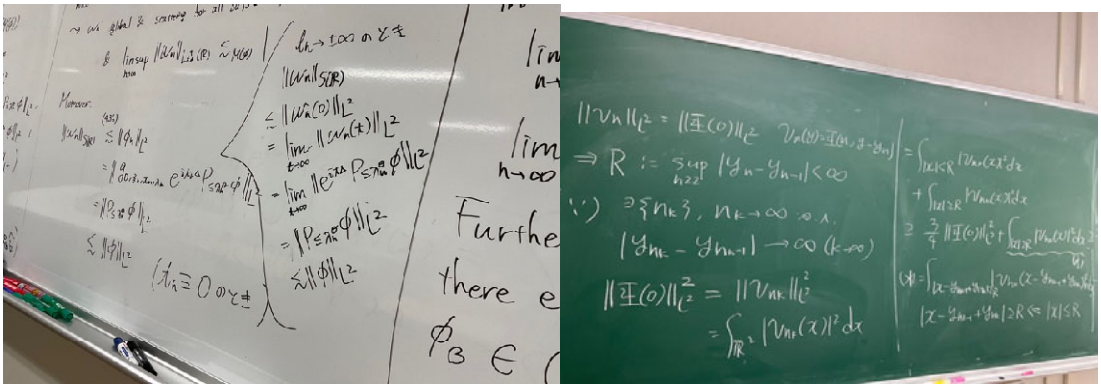
2. 研究の動機、目的

この研究に至る前に、申請者の過去の研究で質量臨界、エネルギー臨界の二重冪の非線形項を持つ(NLS)について解析していた。その研究では空間変数３次元以上としており、それはエネルギー臨界が空間変数２次元の場合には無限大となるためだった。空間２次元の場合にエネルギー臨界を考えるには、冪型の非線形項の代わりに指数型非線形項を扱うことになる。そこで、申請者は指数型非線形項を考えることにより、臨界非線形項をもつ(NLS)の初期値による解の大域挙動の分類の理論構築を目指そうと考えた。また、その応用として、ディラックのデルタ関数を含む非線形項を考察することにした。

3. 研究の結果

解の大域挙動を調べるためには、その形状の変化の様子を調べる必要がある。本研究では定在波解から導出される非線形楕円型方程式の解と、作用汎関数、ビリアル汎関数という２つの汎函数を用いる。解の分散性を表すビリアル恒等式によって、ビリアル汎関数の符号から解の挙動が予測できる。特に、初期値の作用汎関数が基底状態より小さい場合には変分法的特徴付けからビリアル汎関数の符号が不変であるポテンシャル井戸が定義できる。本研究では、ビリアル汎関数の正負に分けてポテンシャル井戸を設定し、それぞれの集合から出発した(NLS)の解を調べた。基底状態より小さい作用汎関数を持つ初期値については、ビリアル汎関数が負の場合に爆発することがわかっているが、正の場合については未解決のままである。未解決の原因としては散乱解の存在を証明する際に質量臨界冪を含むと困難が生じたためである。従って本研究では、Kenig-Merle[2006]の手法を踏襲した。具体的には、凝集コンパクト性の一種であるプロファイル分解を用いてコンパクト性と分散性の両方を持つ解を構成し、その性質を用いる。

この結果、指数型非線形項を持つ(NLS)に関して、初期値の作用汎関数が基底状態より小さい場合に、ビリアル汎関数が正である集合から出発する解は時間大域的に存在し、散乱解となることを示した。指数関数項のために差の評価に Trudinger-Moser 不等式を用いる必要があったため、研究は煩雑になった。この結果は現在国際学術誌に投稿中であり、2025 年度の日本数学会に参加し、口頭発表により研究成果を報告した。基底状態より大きい初期値の場合については、二重冪の場合に得られている結果と、今回の研究成果を踏襲することで解決できると考えて現在進行中である。応用であるディラックのデルタ関数を含む(NLS)についても、現在慎重に進めている。



4. 研究者としてのこれからの展望

本研究では、全ての問題の解決には至らなかったが、残った問題の解決に向けて研究を進めて、得られた結果は国内外の研究集会に発表することで、積極的に発信に努めたい。また、次代の研究を担うことになる学生への教育にも邁進していくことで、社会貢献していきたいと考えている。

5. 支援者（寄付企業等や社会一般）等へのメッセージ

このたびは 2025 年度女性研究者奨励金にご採択いただき、心より感謝申し上げます。本奨励金を活用して必要な物品を購入し、研究を進めることができました。また、本奨励金による

ご支援をいただいたことで、他の学校へ助教として採用していただき、そこで引き続き研究を継続する機会を得ました。今後も本研究を着実に推進し、その成果を国内外の学会発表や論文執筆を通じて広く発信し、社会への貢献に努めてまいります。