2025 年度 若手・女性研究者奨励金 レポート

研究課題	**双曲多面体の増大度と組み合わせ構造に関する研究** **ー材料科学への応用を目的としてー**
キーワード	①双曲幾何学、②幾何学的群論、③増大度

研究者の所属・氏名等

フリガナ 氏　名	ユキタ　トモシゲ 雪田　友成
配付時の所属先・職位等 （令和 7 年 4 月 1 日現在）	足利大学　共通教育センター　講師
現在の所属先・職位等	足利大学　共通教育センター　講師
プロフィール	早稲田大学大学院教育学研究科教科教育学専攻にて博士(理学)を取得。専門は双曲幾何学および幾何学的群論であり、離散構造の複雑さを測る量に関する研究を行う。2023 年 4 月から現在の所属先にて教育・研究に従事している。

1. 研究の概要

本研究は、「双曲多面体」と呼ばれる図形が空間の中でどのように広がっていくかを、「増大度」という量を用いて調べるものである。双曲幾何学は、私たちが日常的に考える平らな空間とは異なり、負の曲率をもつ空間を扱う幾何学である。直感的には、紙の上の平面ではなく、馬の鞍のように反り返った空間の中で図形を考える数学である。

多面体を面に関して次々に折り返していくと、同じ形の多面体が次々と現れ、空間を埋めていくことがある。これは、床をタイルで敷き詰める様子に似ている。ただし、本研究で扱うのは通常の平面や空間ではなく、双曲空間という特殊な空間である。そのため、現れるパターンは通常のタイル張りよりもはるかに豊かで複雑になる。

本研究では、このような双曲多面体について、折り返しを繰り返したときに多面体の個数がどれくらい速く増えるかを調べた。この増え方を表す量が「増大度」である。増大度は、空間の中で多面体がどの程度複雑に広がっていくかを測る指標と考えることができる。特に、増大度が小さい多面体は、構造が比較的単純で理解しやすい可能性がある。本研究では、増大度の小さい双曲多面体に注目し、その形や組み合わせ構造を明らかにすることを目指した。

2. 研究の動機、目的

双曲多面体の研究は、3 次元の空間の形を理解する数学と深く関係している。私たちの身の回りでは、正方形のタイルを並べて床を敷き詰めたり、六角形の構造が蜂の巣やグラフェンのような材料のモデルとして現れたりする。このように、図形をどのように並べることができるかという問題は、純粋数学だけでなく、物質の構造を理解することにもつながる。

双曲空間でも、同じように多面体を並べて空間を充填することができる。しかし、双曲空間では通常の空間とは異なる幾何学的な制約があるため、どのような多面体がどのように空間を埋めるのかを理解することは容易ではない。特に、増大度が小さい多面体は、空間を比較的ゆっくり、規則的に広げていくものと考えられ、その構造を調べることは双曲幾何学の基本的な理解につながる。

これまでの研究では、最も小さい増大度をもつ多面体は、四面体のような単純な形と関係す

ることが知られていた。しかし、その理由が理論的に十分説明されているわけではなく、また、その次に小さい増大度をもつ多面体がどのような形をしているかについても、十分には分かっていなかった。

そこで本研究では、「増大度が小さい多面体は、どのような単純な構造をもつのか」という問いを出発点とした。単に数値を計算するだけではなく、なぜそのような数値になるのか、そしてその数値が多面体の形とどのように関係しているのかを明らかにすることを目的とした。

3. 研究の結果

本研究では、空間充填可能な双曲多面体の増大度を調べるために、多面体そのものだけでなく、その面同士のつながり方を表すグラフにも注目した。このグラフは、多面体の設計図のような役割を果たすものである。建物を理解するときに外観だけでなく設計図を見るように、双曲多面体を理解するためにも、面や辺がどのように結びついているかを記録したグラフが重要になる。

特に、多面体の頂点の近くを小さな球面で切ったときに現れる形に注目した。頂点のまわりに面がどのように集まっているかを見ることで、その多面体全体の構造に関する情報を取り出すことができる。これは、複雑な立体をいきなり全体として見るのではなく、角の部分を拡大して観察することで、全体の性質を理解しようとする方法である。

この考察により、増大度の小さい双曲多面体を理解する上で、双曲四面体と双曲四角錐が重要な役割を果たすことが分かった。四面体は三角形の面からなる最も基本的な多面体であり、四角錐は四角形を底面にもつ比較的単純な多面体である。これらは、双曲空間においても、増大度の小さい多面体を調べる際の基本的な比較対象となる。

また、増大度の計算には、多面体の組み合わせ構造を用いる公式を利用した。これにより、多面体の形を直接眺めるだけでは分かりにくい性質を、数値として比較できるようになった。研究の結果、増大度は単なる計算上の数値ではなく、多面体の構造の単純さや複雑さを反映する有効な指標であることが確認された。

4. 研究者としてのこれからの展望

今後は、本研究で得られた成果をもとに、双曲多面体の増大度と組み合わせ構造の関係をさらに詳しく調べていきたい。特に、最も小さい増大度だけでなく、2 番目、3 番目に小さい増大度をもつ多面体を順に調べることで、双曲多面体の構造をより体系的に理解することを目指す。

直感的に言えば、これは「双曲空間における最も単純なタイル張りの形」を順番に探していく研究である。平面であれば、正三角形、正方形、正六角形による敷き詰めが基本的な例として知られている。これに対して、双曲空間でははるかに多様な敷き詰めが可能であり、その中から単純で基本的なものを見つけることは、双曲空間の構造を理解する上で重要である。

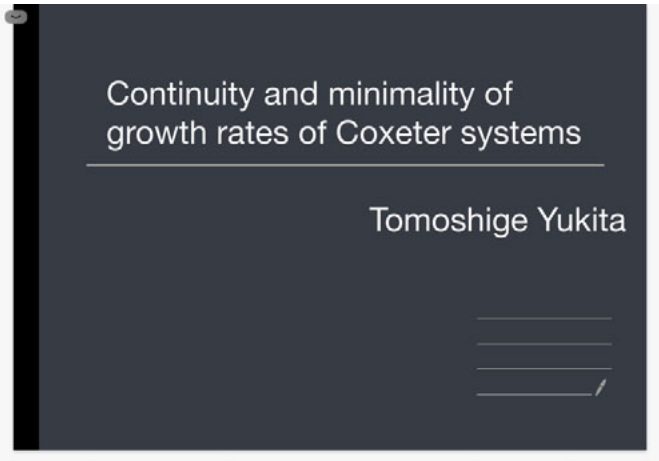
また、計算機を用いた探索と理論的な証明を組み合わせることで、具体的な双曲多面体のリストを整備していきたい。計算機は多くの候補を調べるために有効であるが、得られた結果がなぜ正しいのかを説明するためには数学的な理論が必要である。本研究では、この二つを結びつけることを重視している。

さらに、将来的には、負の曲率をもつ材料やハイパボリックメタマテリアルの数理モデルとの関係も視野に入れて研究を発展させたい。双曲多面体による空間充填は、通常の結晶構造とは異なる新しい構造を考えるための数学的な土台になり得る。すぐに実用化に結びつくものではないが、将来の材料設計や空間構造の理解に向けた基礎研究として、長期的な意義をもつと考えている。

5. 支援者（寄付企業等や社会一般）等へのメッセージ

このたびは、若手・女性研究者奨励金による貴重なご支援を賜り、心より感謝申し上げます。
私たちの身の回りには、タイル張り、結晶、蜂の巣、グラフェンのように、単純な形が規則的に並ぶことで大きな構造を作っている例が数多くあります。本研究は、そのような考え方を双曲空間という特殊な空間に広げ、そこで現れる多面体の広がり方を数学的に調べるものです。

増大度を調べることで、空間を埋める構造がどれほど単純か、あるいは複雑かを理解することができます。いただいたご支援により、研究に必要な文献調査、研究成果の発信を進めることができました。これは単なる金銭的な援助にとどまらず、新しい研究課題に挑戦するための大きな励みとなっています。今後も、双曲幾何学と組み合わせ論を結びつける研究を着実に進めてまいります。そして、数学の基礎研究としての発展に貢献するとともに、将来的には負曲率材料やハイパボリックメタマテリアルの理論的理解にもつながるような研究へと育てていきたいと考えています。温かいご支援に深く感謝申し上げます。



図：申請者がオンラインセミナーで使用した講演スライドの表紙



図：申請者が研究費で購入し、研究に使用した書籍



図：申請者が国際研究集会「Growth5」（於：早稲田大学）で講演する様子